

CORSO DI STATICA E SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

A.A. 2024-2025

Prova scritta in aula del 16.09.2025

Parte II - Testo 1

Nota: I risultati numerici vanno riportati a penna su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui soli fogli a quadretti che sono stati forniti.

Allievo:.....e-mail:..... Matricola:.....

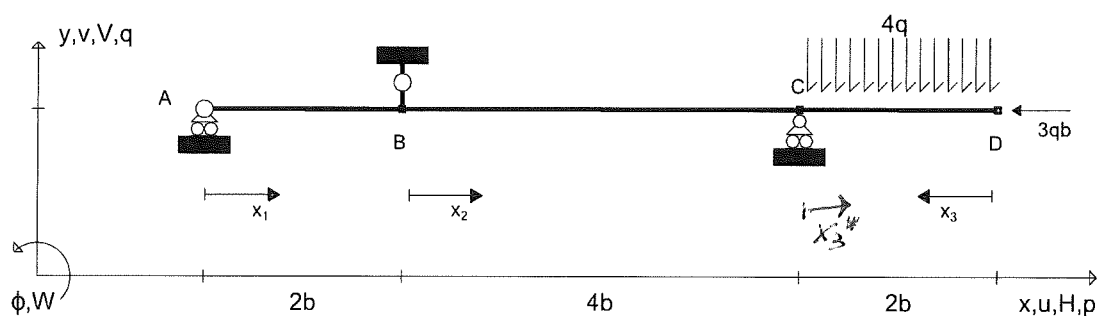
Esercizio n. 1 (17 punti)

Risolvere mediante il Principio dei Lavori Virtuali (PLV) la struttura iperstatica riportata in Figura, assumendo, come incognita iperstatica, il momento flettente sull'appoggio di continuità B, M_B . Dopo avere determinato l'iperstatica *tenendo conto solo della deformabilità flessionale*, calcolare le reazioni vincolari, le azioni interne e tracciare nello spazio predisposto nella pagina a fronte i corrispondenti grafici.

Calcolare infine, riapplicando il PLV, la componente di spostamento verticale del punto D, v_D . Si rammenta che il diagramma del momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese.

Universita' di Cagliari

SdC_SdA 2 16.09.25*001



Esercizio n. 2 (7 punti)

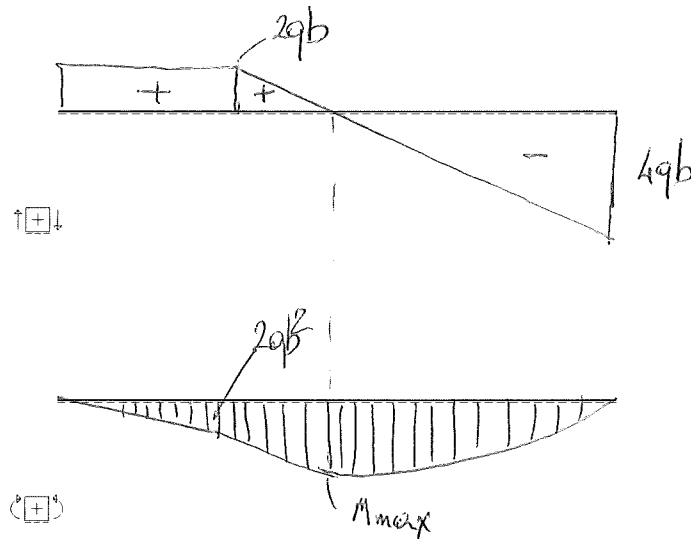
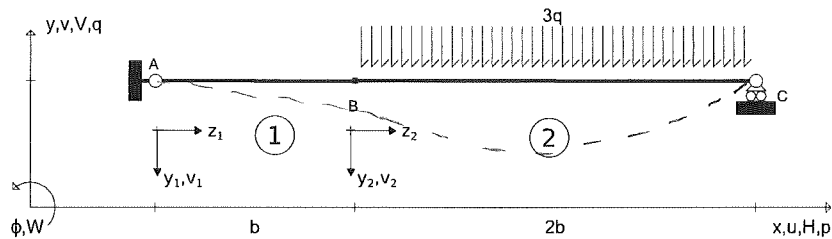
Per la struttura *isostatica*, indicata in Figura, determinare le reazioni vincolari e l'espressione delle azioni interne, nonché le condizioni al contorno imposte dai vincoli nei punti *A*, *B* e *C*.

Utilizzare quindi l'equazione della linea elastica per determinare:

1. La deformata della linea d'asse, $v(z) = v_1(z_1) \cup v_2(z_2)$;
2. La sua derivata prima, $v'(z) = v_1'(z_1) \cup v_2'(z_2)$;
3. La rotazione del punto *C*, φ_C ;
4. Lo spostamento verticale del punto *B*, v_B .

Universita' di Cagliari

SdC_SdA_2 16.09.25*001



$$V_A (\uparrow) = 2qb; H_A (\Rightarrow) = 0; V_C (\uparrow) = 4qb;$$

$$N_{AB} = 0; T_{AB} = 2qb; M_{AB} = 2qbz_1;$$

$$N_{BC} = 0; T_{BC} = 2qb - 3qz_2; M_{BC} = 2qb^2 + 2qbz_2 - \frac{3}{2}qz_2^2;$$

$$\text{c.c in A} = \sqrt{1}(z_1=0) = 0; \text{c.c in B} = \sqrt{1}(z_1=b) = \sqrt{2}(z_2=0); \sqrt{1}(z_1=b) = \sqrt{2}'(z_2=0)$$

$$\text{c.c in C} = \sqrt{2}(z_2=2b) = 0;$$

$$v_1(z_1) = \frac{7qb^3}{3EI} - \frac{1}{3} \frac{qbz_1^3}{EI}; v_1'(z_1) = \frac{7qb^2}{3EI} - \frac{qbz_1^2}{EI};$$

$$v_2(z_2) = \frac{2qb^4}{EI} + \frac{4qb^3z_2}{3EI} - \frac{qbz_2^2}{EI} - \frac{1}{3} \frac{qbz_2^3}{EI} + \frac{1}{24} \frac{qz_2^4}{EI}; v_2'(z_2) = \frac{4qb^3}{3EI} - \frac{2qbz_2}{EI} - \frac{qbz_2^2}{EI} + \frac{1}{6} \frac{qz_2^3}{EI};$$

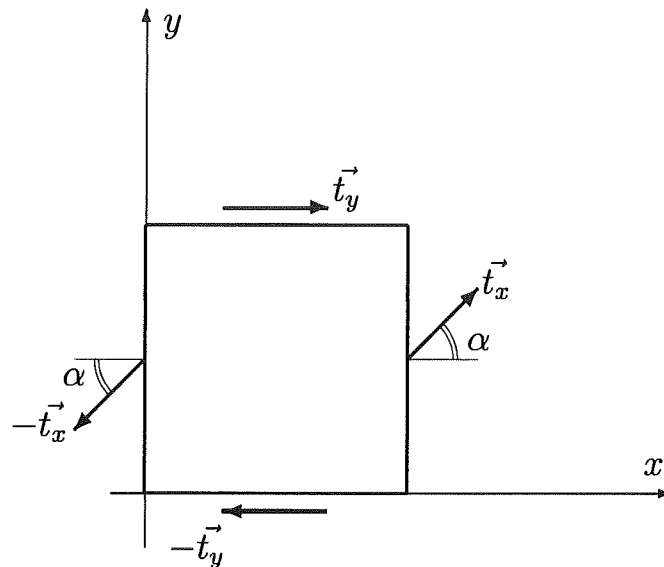
$$v_B = \frac{2qb^4}{EI}; \varphi_C = -\frac{8}{3} \frac{qb^2}{EI};$$

Esercizio n. 3 (9 punti)

Un elemento di materiale *in condizioni di equilibrio* è soggetto lungo le facce aventi come normali gli assi x e y ai vettori sforzo (piani) \vec{t}_x e \vec{t}_y rispettivamente; di questi \vec{t}_x è inclinato rispetto all'asse x di un angolo $\alpha = -60^\circ$ (sicché: $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos \alpha = \frac{1}{2}$) e ha modulo di valore $|\vec{t}_x| = 17,500$ MPa. L'altro vettore sforzo, \vec{t}_y , è invece *orizzontale* (ma di verso non specificato!), come indicato in Figura.

Si chiede di determinare le componenti σ_x , σ_y e τ_{xy} del tensore degli sforzi, costruire il cerchio di Mohr, determinare gli sforzi principali, σ_1 e σ_2 , e la massima tensione tangenziale, τ_{\max} .

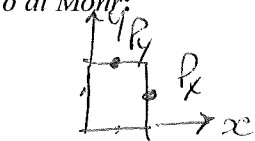
Determinare inoltre quanto vale l'angolo φ formato dall'asse x e dall'asse normale alla faccia sulla quale agisce lo sforzo principale massimo, σ_1 .



$$\sigma_x = 8.7500 \text{ (MPa)}; \sigma_y = 0.0000 \text{ (MPa)}; \tau_{xy} = -15.1554 \text{ (MPa)};$$

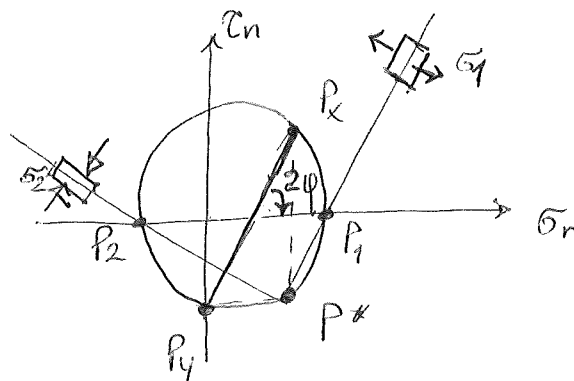
$$\sigma_1 = 20.1493 \text{ (MPa)}; \sigma_2 = -11.3993 \text{ (MPa)}; \tau_{\max} = 15.7743 \text{ (MPa)};$$

cerchio di Mohr:

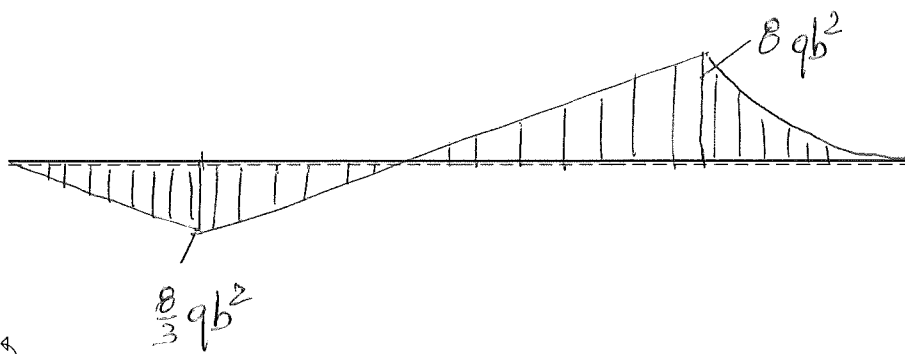
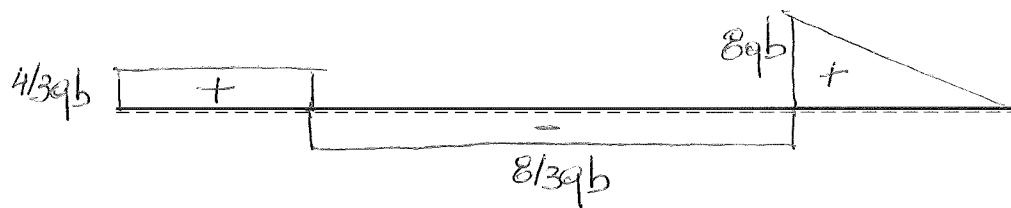
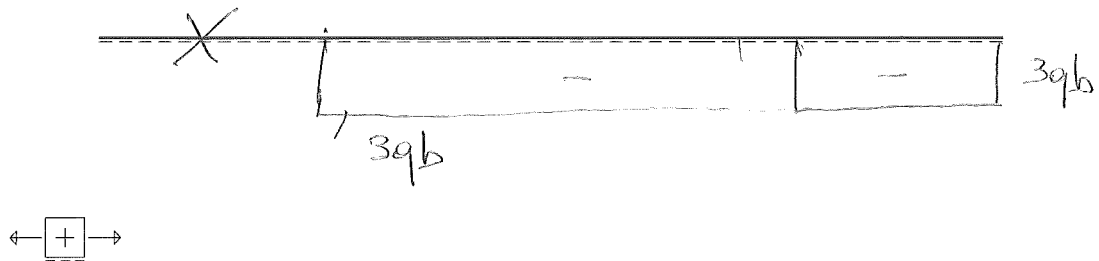


$$P_x = (8.750; 15.1554)$$

$$P_y = (0.000; -15.1554)$$



$$\varphi = -36.9489 \text{ (}^\circ\text{)};$$



$$\begin{aligned}
 V_A(\uparrow) &= \frac{4}{3}qb; & H_B(\Rightarrow) &= 3qb; & V_B(\uparrow) &= -4qb; & V_C(\uparrow) &= \frac{32}{3}qb; & M_B(\curvearrowright) &= \frac{8}{3}qb^2 \\
 N_{AB} &= 0; & T_{AB} &= \frac{4}{3}qb; & M_{AB} &= \frac{4}{3}qb^2; \\
 N_{BC} &= -3qb; & T_{BC} &= -\frac{8}{3}qb; & M_{BC} &= \frac{8}{3}qb^2 - \frac{8}{3}qb^2; \\
 N_{DC} &= -3qb; & T_{DC} &= \begin{cases} 4qx_3 \\ 8qb - 4qx_3^* \end{cases}; & M_{DC} &= \begin{cases} -2qx_3^2 \\ -8qb^2 + 8qb^2x_3^* - 2qx_3^{*2} \end{cases}; \\
 v_D &= -\frac{232}{9} \frac{qb^4}{EI}
 \end{aligned}$$

CORSO DI STATICA E SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

A.A. 2024-2025

Prova scritta in aula del 16.09.2025

Parte II - Testo 2

Nota: I risultati numerici vanno riportati a penna su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui soli fogli a quadretti che sono stati forniti.

Allievo:.....e-mail:..... Matricola:.....

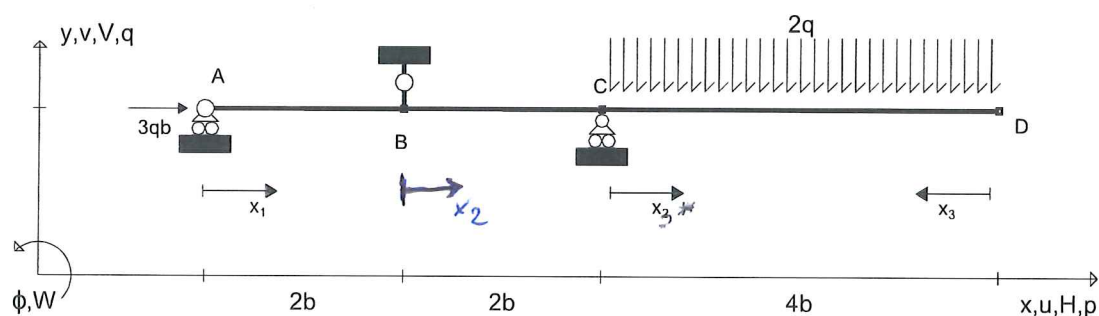
Esercizio n. 1 (17 punti)

Risolvere mediante il Principio dei Lavori Virtuali (PLV) la struttura iperstatica riportata in Figura, assumendo, come incognita iperstatica, il momento flettente sull'appoggio di continuità B, M_B . Dopo avere determinato l'iperstatica *tenendo conto solo della deformabilità flessionale*, calcolare le reazioni vincolari, le azioni interne e tracciare nello spazio predisposto nella pagina a fronte i corrispondenti grafici.

Calcolare infine, riapplicando il PLV, la componente di spostamento verticale del punto D, v_D . Si rammenta che il diagramma del momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese.

Università' di Cagliari

SdC_SdA 2 16.09.25*002



Esercizio n. 2 (7 punti)

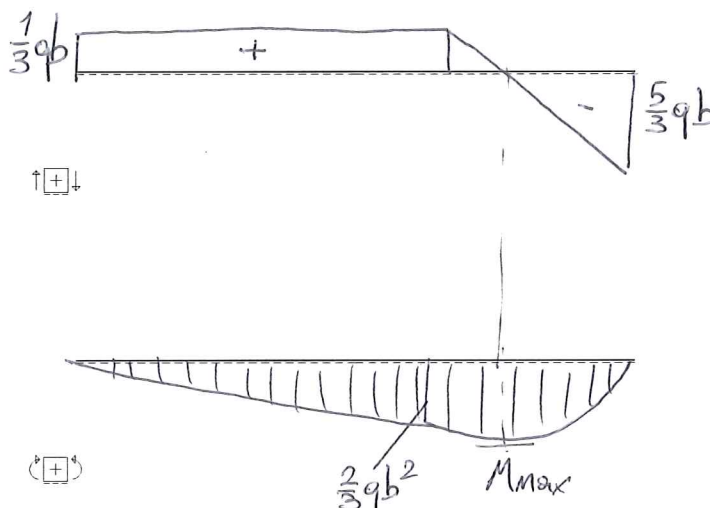
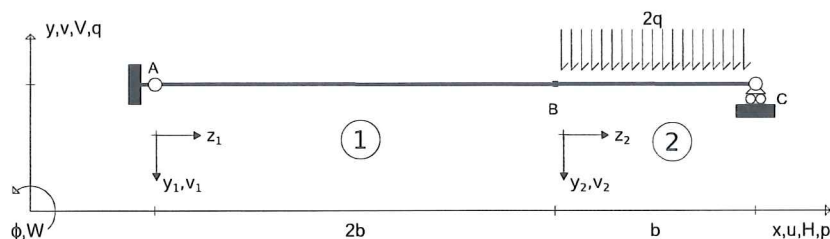
Per la struttura *isostatica*, indicata in Figura, determinare le reazioni vincolari e l'espressione delle azioni interne, nonché le condizioni al contorno imposte dai vincoli nei punti A, B e C.

Utilizzare quindi l'equazione della linea elastica per determinare:

1. La deformata della linea d'asse, $v(z) = v_1(z_1) \cup v_2(z_2)$;
2. La sua derivata prima, $v'(z) = v_1'(z_1) \cup v_2'(z_2)$;
3. La rotazione del punto C, φ_C ;
4. Lo spostamento verticale del punto B, v_B .

Università di Cagliari

SdC_SdA_2 16.09.25*002



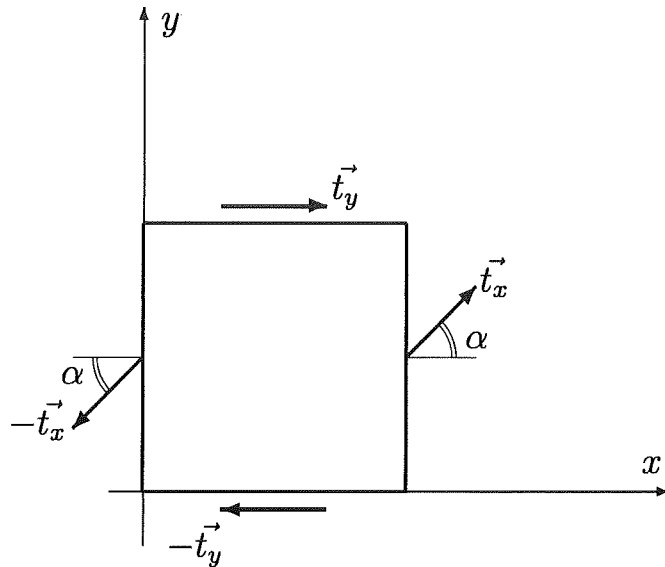
$$\begin{aligned}
 V_A (\uparrow) &= \frac{1}{3}qb; & H_A (\Rightarrow) &= 0; & V_C (\uparrow) &= \frac{5}{3}qb; \\
 N_{AB} &= 0; & T_{AB} &= \frac{1}{3}qb; & M_{AB} &= \frac{1}{3}qbz_1; \\
 N_{BC} &= 0; & T_{BC} &= \frac{1}{3}qb - 2qz_2; & M_{BC} &= \frac{2}{3}qb^2 + \frac{1}{3}qbz_2 - qz_2^2; \\
 \text{c.c in A} &= \sqrt{1}(z_1=0) = 0; & \text{c.c in B} &= \sqrt{1}(z_1=2b) = \sqrt{2}(z_2=0); & \sqrt{1}'(z_1=2b) &= \sqrt{2}'(z_2=0); \\
 \text{c.c in C} &= \sqrt{2}(z_2=b) = 0; \\
 v_1(z_1) &= \frac{17}{36} \frac{qb^3 z_1^3}{EI} - \frac{1}{18} \frac{qb^2 z_1^3}{EI}; & v_1'(z_1) &= \frac{17}{36} \frac{qb^3}{EI} - \frac{1}{6} \frac{qb^2 z_1^2}{EI}; \\
 v_2(z_2) &= \frac{1}{2} \frac{qb^4}{EI} - \frac{7}{36} \frac{qb^3 z_2}{EI} - \frac{1}{3} \frac{qb^2 z_2^2}{EI} - \frac{1}{18} \frac{qb z_2^3}{EI} + \frac{1}{12} \frac{q z_2^4}{EI}; & v_2'(z_2) &= -\frac{7}{36} \frac{qb^3}{EI} - \frac{2}{3} \frac{qb^2 z_2}{EI} - \frac{1}{6} \frac{qb z_2^2}{EI} + \frac{1}{3} \frac{q z_2^3}{EI}; \\
 v_B &= \frac{1}{2} \frac{qb^4}{EI} (\downarrow); & \varphi_C &= -\frac{25}{36} \frac{qb^3}{EI} (\searrow);
 \end{aligned}$$

Esercizio n. 3 (9 punti)

Un elemento di materiale *in condizioni di equilibrio* è soggetto lungo le facce aventi come normali gli assi x e y ai vettori sforzo (piani) t_x e t_y rispettivamente; di questi t_x è inclinato rispetto all'asse x di un angolo $\alpha = -30^\circ$ (sicché: $\sin \alpha = -\frac{1}{2}$; $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$) e ha modulo di valore $|t_x| = 22,500$ MPa. L'altro vettore sforzo, t_y , è invece *orizzontale* (ma di verso non specificato!), come indicato in Figura.

Si chiede di determinare le componenti σ_x , σ_y e τ_{xy} del tensore degli sforzi, costruire il cerchio di Mohr, determinare gli sforzi principali, σ_1 e σ_2 , e la massima tensione tangenziale, τ_{\max} .

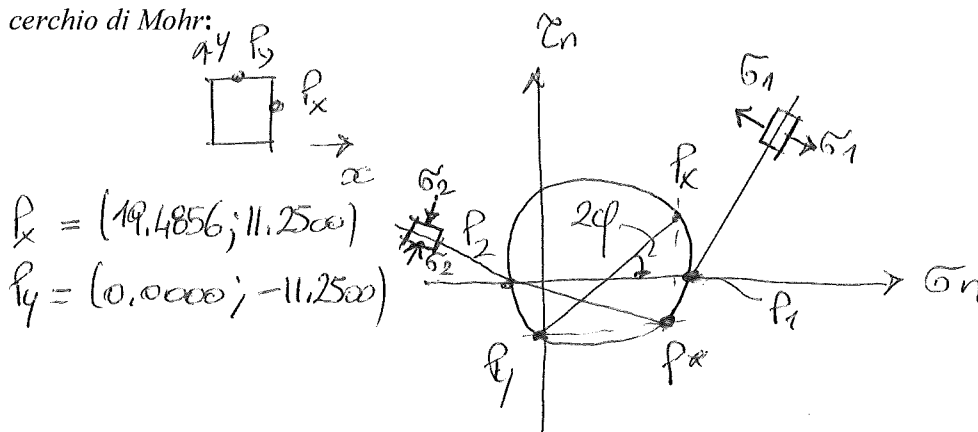
Determinare inoltre quanto vale l'angolo φ formato dall'asse x e dall'asse normale alla faccia sulla quale agisce lo sforzo principale massimo, σ_1 .



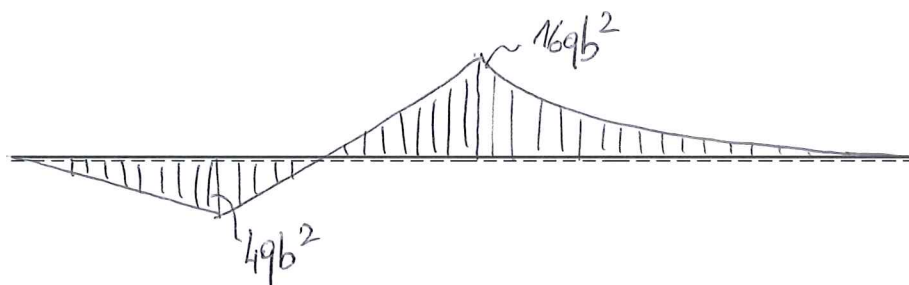
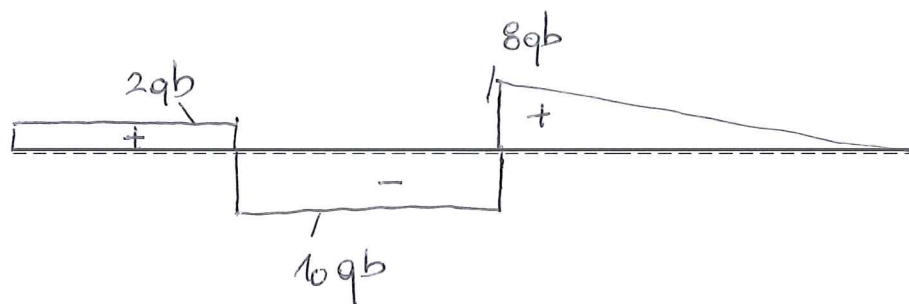
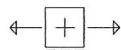
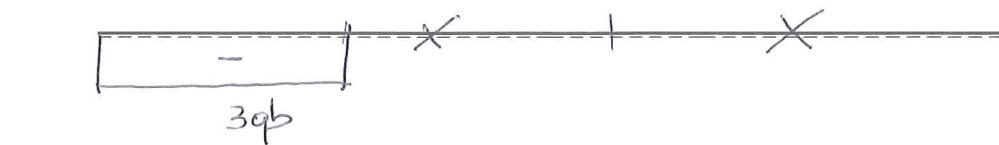
$$\sigma_x = 19,4856 \text{ (MPa)}; \sigma_y = 0,0000 \text{ (MPa)}; \tau_{xy} = -11,2500 \text{ (MPa)};$$

$$\sigma_1 = 24,6251 \text{ (MPa)}; \sigma_2 = -5,1396 \text{ (MPa)}; \tau_{\max} = 14,8824 \text{ (MPa)};$$

cerchio di Mohr:



$$\varphi = -24,5533 (^\circ);$$



$$\begin{aligned}
 V_A(\uparrow) &= 2qb; & H_B(\Rightarrow) &= -3qb; & V_B(\uparrow) &= -12qb; & V_C(\uparrow) &= 18qb; & M_B(\curvearrowright) &= 4qb^2 \\
 N_{AB} &= -3qb; & T_{AB} &= 2qb; & M_{AB} &= 2qb \cdot x_1; \\
 N_{BC} &= 0; & T_{BC} &= -10qb; & M_{BC} &= 4qb^2 - 10qb \cdot x_2; \\
 N_{DC} &= 0; & T_{DC} &= \begin{cases} 2qx_3 \\ 8qb - 2qx_3^* \end{cases}; & M_{DC} &= \begin{cases} -qx_3^2 \\ -16qb^2 + 8qb \cdot x_3^* - qx_3^{*2} \end{cases}; \\
 v_D &= -\frac{304}{3} \frac{qb^4}{EI}
 \end{aligned}$$